

Критерий Михайлова.

Устойчивость системы выясняется по характеристическому полиному передаточной функции:

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (2.5)$$

где n – степень полинома.

Полагая $p = j\omega$, преобразуем характеристический полином в комплексный частотный полином:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n.$$

В зависимости от степени числа $(j\omega)^n$ оно либо действительное, либо мнимое. По этой причине частотный полином распадается на действительную часть $U(\omega)$ и мнимую часть $V(\omega)$:

$$D(j\omega) = U(\omega) + j V(\omega), \quad (5.7)$$

$$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \quad (5.8)$$

$$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \quad (5.9)$$

$U(\omega)$ – четная функция ω , $V(\omega)$ – нечетная функция ω . По этому признаку полиномы (5.8) и (5.9) можно назвать «четный» и «нечетный».

Можно дать три формулировки критерию Михайлова.

Первая формулировка. Если при изменении частоты от нуля до бесконечности годограф Михайлова начинается на действительной оси в точке a_n , последовательно проходит против часовой стрелки n квадрантов комплексной плоскости, не проходя через ноль, и уходит в бесконечность в n -м квадранте, – система устойчива.

Вторая формулировка. Если при изменении частоты от нуля до бесконечности вектор комплексного частотного полинома $D(j\omega)$ последовательно поворачивается против часовой стрелки на угол $n(\pi/2)$, где n – степень характеристического полинома, и нигде не становится нулем, – система устойчива.

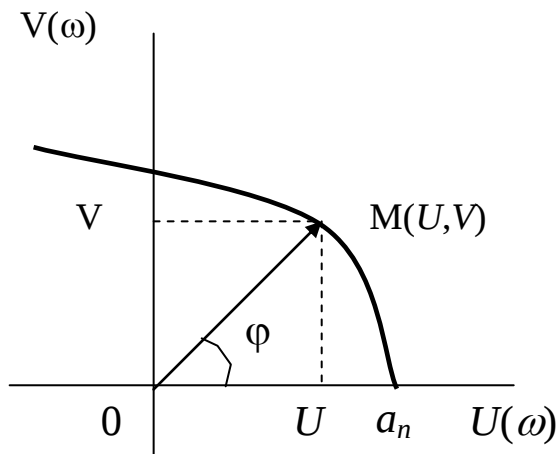


Рис. 5.1.

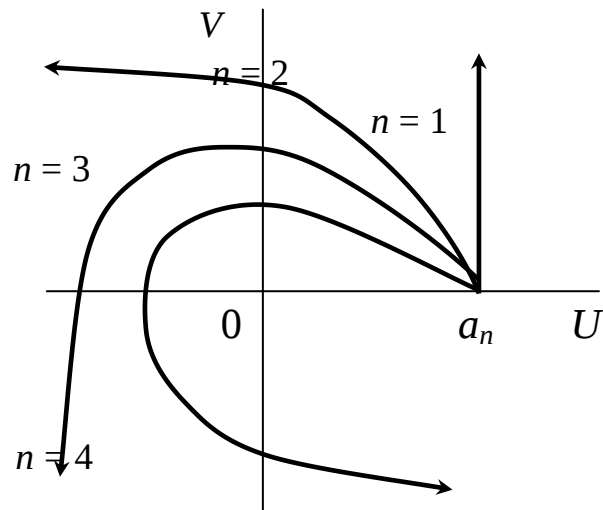


Рис. 5.2.

Третья формулировка критерия Михайлова: если частоты пересечения годографа с осями координат чередуются и образуют возрастающую последовательность вида $\bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_2 < \bar{\omega}_3 < \dots < \bar{\omega}_n$, - система устойчивая.

В отличие от предыдущих, третья формулировка позволяет исследовать устойчивость системы без построения годографа, аналитически.

Пример 1.

Разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{10(0,1p + 1)}{0,009p^3 + 0,02p^2 + 0,1p}.$$

Выяснить устойчивость замкнутой системы.

Решение.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$0,009p^3 + 0,02p^2 + 1,1p + 10 = 0.$$

Комплексный частотный полином, нечетный и четный полиномы:

$$D(j\omega) = -j 0,009\omega^3 - j 1,1\omega + 10 - 0,02 \omega^2,$$

$$V(\omega) = 1,1\omega - 0,009\omega^3,$$

$$U(\omega) = 10 - 0,02 \omega^2.$$

Частоты пересечения:

$$V(\omega) = 0, \quad \bar{\omega}_1 = 0, \quad \bar{\omega}_3 = 11,0.$$

$$U(\omega) = 0, \quad \bar{\omega}_2 = 22,4.$$

Требование чередования частот при последовательном возрастании не выполняется:

$$\bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_2 > \bar{\omega}_3.$$

Следовательно, система неустойчива.

Подтверждение этому получим, вычислив значения угла поворота вектора $D(j\omega)$ при частотах пересечения с осями. Запишем тангенс аргумента:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega(1,1 - 0,009\omega^2)}{10 - 0,02\omega^2}.$$

Вычисляем: $\omega_1 = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0^\circ.$
 $\omega_2 = 22,4, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\infty, \quad \varphi_2 = -90^\circ.$
 $\omega_3 = 11,0 \quad \operatorname{tg} \varphi = 0,00, \quad \varphi_3 = 0^\circ.$

Угол φ не возрастает последовательно для каждой частоты пересечения. И не становится равным степени характеристического уравнения, умноженной на $\pi/2$.

Как выглядит годограф Михайлова, показано на рис. 5.7.

Таблица данных

ω	U	V
0	10	0
5	9,5	4,4
11	7,6	0
15	5,5	-14
22,4	0	-76

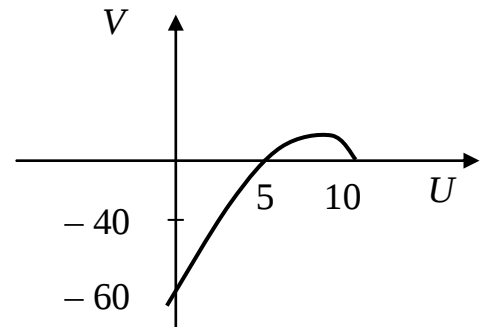


Рис. 5.7. $n = 3$

Кривая не охватывает начала координат. Система неустойчивая.

2. Содержание занятия

Задания по тематике.

Задача 1.

Разомкнутая система имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 (T_1 p + 1)}{T_1 T_2^2 p^3 + T_1 T_3 p^2 + T_1 p}.$$

Выяснить устойчивость замкнутой системы по Михайлову при $T_1 = 0,1$; $T_2 = 0,15$; $T_3 = 0,2$; $k_1 = 10$; $k_2 = 20$.

Задача 2.

Выяснить устойчивость системы с характеристическим уравнением второй степени

$$3p^2 + 2p + 1 = 0.$$

Задача 3.

Система с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{5}{p^3 + 7p^2 + 3p + 1}$$

замыкается. Будет ли она устойчивой?

Задача 4.

Оценить устойчивость автоматической системы по критерию Михайлова, если известен характеристический полином замкнутой системы

A) $D(p) = p^3 + 0,5p^2 + 12p + 5.$

Б) $D(p) = p^3 + 2p^2 + 4p + 10.$

С) $D(p) = p^3 + 10p^2 + 6p + 2.$

В) $D(p) = 2p^3 + 4p^2 + 3p + 5.$

Задача 5.

Построить годограф Михайлова для системы дифференциальное уравнение которой

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} + 20y = x.$$

Сделать вывод об устойчивости.